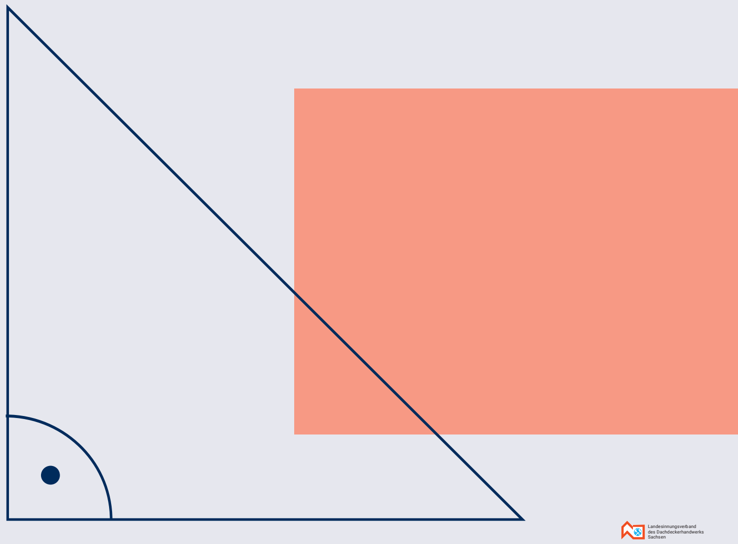
Notizen

Kapitel 2

Das rechtwinklige Dreieck



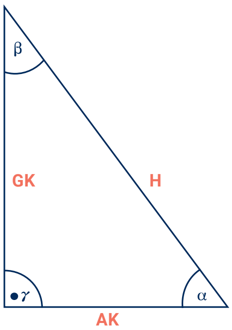
2.1. Stücke im rechtwinkligen Dreieck

H **Hypotenuse** = längste Seite im rechtwinkligen Dreieck liegt stets dem rechten Winkel gegenüber.

AK **Ankathete** = eine der beiden kürzeren Seiten (Katheten) des rechtwinkligen Dreieckes; die Kathete, die direkt am betrachteten Winkel (hier: α (sprich: alfa)) liegt.

GK **Gegenkathete** = die andere der beiden kürzeren Seiten des rechtwinkligen Dreieckes; die Kathete, die nicht am betrachteten Winkel (hier: α) liegt.

α, β **spitze Winkel** = Jedes rechtwinklige Dreieck hat außer dem rechten Winkel (hier: γ (sprich: gamma) noch zwei spitze Winkel (hier: α und β (sprich: beta).



2.2. Sätze (Gesetzmäßigkeiten) am rechtwinkligen Dreieck

Satz des Pythagoras:
Das Quadrat der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate der Katheten.

$$H^2 = GK^2 + AK^2$$

Innenwinkelsatz:
Die Summe der Innenwinkel im Dreieck beträgt stets 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Bedeutet auch:
Im rechtwinkligen Dreieck beträgt die Summe der beiden spitzen Winkel stets 90°.

$$\alpha + \beta = 90°$$

2.3. Definitionen für Winkel am rechtwinkligen Dreieck

Sinus eines Winkels:
ist das Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse.

$$\sin\alpha = \frac{GK}{H}$$

Kosinus eines Winkels:
ist das Verhältnis von Ankathete zu Hypotenuse.

$$\cos\alpha = \frac{AK}{H}$$

Tangens eines Winkels:
ist das Verhältnis von Gegenkathete zu Ankathete.

$$\tan\alpha = \frac{GK}{AK}$$

**Alle diese so berechneten Werte (sin α, cos α, tan α) sind Zahlen ohne Maßeinheit.
Aus diesen Zahlen berechnet man dann mit dem Rechner den Winkel in Grad.**

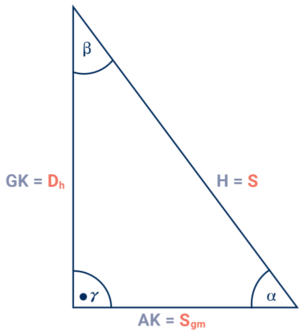
2.4. Das rechtwinklige Dreieck des Dachdeckers

H Als Hypotenuse H verwendet er die **Sparrenlänge S.**

AK Als Ankathete AK verwendet er die halbe Dachbreite, also das **Sparrengrundmaß S_{gm}** (oder auch **X**).

GK Als Gegenkathete GK verwendet er die **Dachhöhe D_h** (oder auch **H**).

α Der spitze Winkel zwischen Sparrengrundmaß und Sparrenlänge ist die **Dachneigung α**.



Für Dachdecker gilt also :

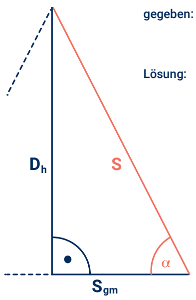
Satz des Pythagoras: $S^2 = D_h^2 + S_{gm}^2$

oder auch: $S^2 = H^2 + X^2$

für die Dachneigung z.B.: $\tan\alpha = \frac{D_h}{S_{gm}}$

2.5. Eine Beispielaufgabe

Ein Satteldach mit gleicher Neigung habe eine Breite von 12,00 m und eine Dachhöhe von 8,00 m. Berechne die Sparrenlänge und die Dachneigung.



gegeben: $D_h = 8{,}00\ m$
$S_{gm} = 6{,}00\ m$

gesucht: S, α

Lösung:

$S^2 = Dh^2 + Sgm^2$

$S^2 = (8{,}00\ m)^2 + (6{,}00\ m)^2$

$S = \sqrt{100\ m^2}$

$\underline{\underline{S = 10\ m}}$

$\tan\alpha = \frac{Dh}{Sgm}$

$\tan\alpha = \frac{8{,}00\ m}{6{,}00\ m}$

$\tan\alpha = 1{,}333...$

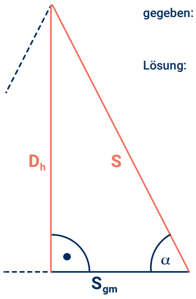
$\alpha = 53{,}13...°$

$\underline{\underline{\alpha = 53°}}$

Dies ist eine (Teil-) Skizze des Dachgiebels.

2.6. Eine Beispielaufgabe mit Umstellen der Formel

Ein Satteldach mit gleicher Neigung habe eine Breite von 9,40 m und eine Dachneigung von 38°. Berechne die Dachhöhe und die Sparrenlänge.



gegeben: $S_{gm} = 4{,}70$ m, $\alpha = 38°$

gesucht: D_h, S

Lösung:

$\tan\alpha = \frac{D_h}{S_{gm}} \quad | \cdot S_{gm}$

$S_{gm} \cdot \tan\alpha = D_h$

$D_h = S_{gm} \cdot \tan\alpha$

$D_h = 4{,}70\text{ m} \cdot \tan 38°$

$D_h = 4{,}70\text{ m} \cdot 0{,}7812...$

$\underline{\underline{D_h = 3{,}67\text{ m}}}$

$\cos\alpha = \frac{S_{gm}}{S} \quad | \cdot S$

$S \cdot \cos\alpha = S_{gm} \quad | : \cos\alpha$

$S = \frac{S_{gm}}{\cos\alpha}$

$S = \frac{4{,}70\text{ m}}{\cos 38°}$

$S = \frac{4{,}70\text{ m}}{0{,}7880...}$

$\underline{\underline{S = 5{,}96\text{ m}}}$

Skizze (nicht maßstäblich)

2.7. Zusammenfassende Hinweise

- Achte darauf, dass das betrachtete **Dreieck rechtwinklig** ist. Nur dann gelten die genannten Gesetzmäßigkeiten. Suche solche Dreiecke oder bilde sie in Gedanken.
- Im rechtwinkligen Dreieck **berechnest du die Länge der größten Seite** aus den beiden kleineren, indem du die Quadrate der beiden kleineren bildest, diese Quadrate zusammenzählst und dann die Wurzel daraus ziehst.

Beispiel: $S = \sqrt{D_h^2 + S_{gm}^2}$

- Im rechtwinkligen Dreieck **berechnest du die Länge einer der kleineren Seiten** aus den beiden anderen, indem du vom Quadrat der größten Seite das Quadrat der gegebenen kleinen abziehst und dann die Wurzel daraus ziehst.

Beispiel: $D_h = \sqrt{S^2 - S_{gm}^2}$

Teste mit deinem Rechner!

Der Sinus oder der Kosinus eines spitzen Winkels ist immer eine Zahl zwischen 0 und 1.

Beispiel: $\alpha = 30°$, dann ist $\sin\alpha = 0{,}5$ und $\cos\alpha = 0{,}86602$

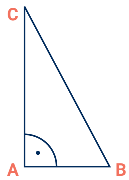
- Der Tangens eines Winkels zwischen 0° und 45° ist eine Zahl zwischen 0 und 1. Der Tangens von 45° ist 1. Der Tangens eines Winkels zwischen 45° und 90° ist eine Zahl größer als 1.

Beispiel: $\alpha = 30°$, dann $\tan\alpha = 0{,}57735$; $\beta = 60°$, dann $\tan\beta = 1{,}73205$

Übungen

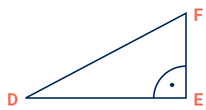
MERKE
Im Dreieck werden die Eckpunkte mit großen Buchstaben benannt und die Seiten mit kleinen. **Es gilt:** Seite a liegt gegenüber Eckpunkt A usw. und beim Eckpunkt A liegt (Innen-) Winkel α usw.

Aufgabe 2.1.



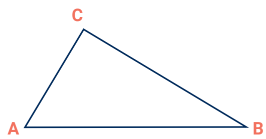
a. Benenne die drei Innenwinkel des Dreieckes ABC.
b. Welche Seiten sind hier die Katheten bzw. und welche ist Hypotenuse?
c. Notiere für dieses Dreieck die Formel nach dem Satz des Pythagoras!
d. Notiere für den Winkel beim Punkt B die Formeln für den Sinus, den Cosinus und den Tangens dieses Winkels β.

Aufgabe 2.2.



a. Benenne die Seiten und Winkel (α, β, γ; Winkel α soll beim Punkt D liegen). Wie heißt demnach hier der rechte Winkel?
b. Welchen Seiten sind die Katheten? Welche Seite ist die Hypotenuse?
c. Notiere die Formel nach dem Satz des Pythagoras.
d. Notiere für den Winkel beim Punkt F die Formeln für den Sinus, den Cosinus und den Tangens dieses Winkels.

Aufgabe 2.3.



Für das Dreieck ABC gelte: $c^2 = a^2 + b^2$.
a. Benenne die Innenwinkel und Seiten.
b. Welche Seite ist die Hypotenuse. Welcher der 3 Winkel ist der rechte Winkel?
c. Notiere für den Winkel beim Punkt A die Formeln für den Sinus, den Cosinus und den Tangens dieses Winkels.

Übungen

MERKE
Im Allgemeinen werden im Dreieck die Eckpunkte mit großen Buchstaben benannt und die Seiten mit kleinen.
Es gilt: Seite a liegt gegenüber Eckpunkt A usw.
Und es gilt auch: Beim Eckpunkt A liegt (Innen-) Winkel α usw.

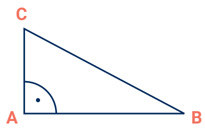
Aufgabe 2.4.

geg.: b = 3,50 m
c = 350 cm

a. Übernimm die Skizze und beschrifte die Seiten und Winkel des Dreiecks ABC.

b. Berechne die Länge der Seite a.

c. Berechne die Größe der Winkel β (bei B) und γ (bei C) mithilfe des Innenwinkelsatzes.



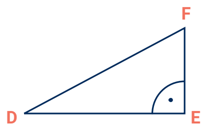
MERKE
Der Umfang eines Dreiecks ist die Summe der Seitenlängen.

Aufgabe 2.5.

geg.: d = 2,80 m
f = 4,5 m

a. Berechne die Länge der Seite e und Größen der Winkel α und γ (Winkel α soll beim Punkt D liegen).

b. Berechne den Umfang des Dreieckes DEF.



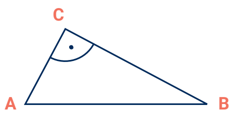
Aufgabe 2.6.

geg.: b = 2,65 m
c = 400 cm

a. Berechne die Länge der Seite a.

b. Notiere Namen (Symbol) und Größe des gegebenen Winkels.

c. Berechne die Größen der beiden anderen Winkel.



Übungen

MERKE
In jedem Dreieck gilt: Der größeren Seite liegt der größere Winkel gegenüber.
(Beispiel: Wenn $\alpha > \beta$ ist, dann gilt auch a > b.)

Aufgabe 2.7.

Für ein Dreieck ABC sei gegeben: $\alpha = 25°$, $\beta = 90°$, a = 2.200 mm.

a. Überlege: Welche Seite ist hier die Hypotenuse? Wie groß ist der Winkel γ etwa? Ist somit die Seite c größer oder kleiner als die Seite a?

b. Skizziere das Dreieck ABC entsprechend. Beschrifte Eckpunkte, Seiten und Winkel.

c. Berechne die Größe des Winkels γ und die Längen der Seiten b und c.

Aufgabe 2.8.

Für ein „Dachdeckerdreieck" sei bekannt: Die Dachneigung α betrage 52° und die Dachhöhe D_h (oder auch mit H benannt) betrage 3,75 m.

a. Überlege: Welche Seite ist bei diesem „Dachdeckerdreieck" die Hypotenuse? Ist das Sparrengrundmaß S_{gm} (X) größer oder kleiner als die Dachhöhe D_h (H)?

b. Skizziere das Dreieck entsprechend und beschrifte.

c. Berechne die Sparrenlänge S und das Sparrengrundmaß S_{gm} (X).

MERKE
Sind die Seiten eines Dreieckes gleich lang, so sind auch die gegenüberliegenden Winkel gleich groß. (Das Dreieck ist dann gleichschenklig, die beiden gleich großen Winkel nennt man Basiswinkel.)

Aufgabe 2.9.

Für den Giebel eines Satteldaches mit gleicher Neigung sind die die Dachbreite und die Winkelgröße an der Giebelspitze bekannt (siehe Skizze).

a. Übernimm die Skizze und ergänze diese mit einem recht-winkligen Dreieck, in welchem du Sparrenlänge, Sparren-grundmaß und Dachhöhe kennzeichnest.

b. Berechne Neigungswinkel, Sparrengrundmaß, Sparrenlänge und Dachhöhe.