## Übungen

**Aufgabe 3.13.**

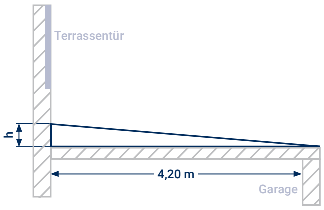
Wieviel Prozent Gefälle hat eine Dachrinne, die auf 12,00 m Länge um 3 cm fällt?

**Aufgabe 3.14.**

Wie hoch ist ein Pultdach mit der Neigung von 6 % und einem Sparrengrundmaß von 14,00 m?

**Aufgabe 3.15.**

Auf eine im Kellergeschoss befindliche Garage eines Einfamilienhaus soll eine 4,20 m breite Terrasse gebaut werden, die vom Erdgeschoss aus über eine Terrassentür erreichbar sein soll.
Auf dem Garagendach (Dämmung ist bereits vorhanden) muss vor dem weiteren Aufbau (Isolierung, wasserabführende Matten, Terrassenbelag, ...) eine Neigung erstellt werden, um Pfützenbildung und somit Frostschäden zu verhindern. Es wird eine flexible mineralische Isolierung aufgebracht, für die der Hersteller eine Mindestneigung des Terrassenbodens von 3,5% Prozent vorschreibt.

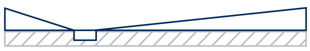



**a.** Berechne die Höhe h, um die die Terrasse somit auf der Seite der Tür angehoben werden muss, damit die vorgeschriebene Neigung entsteht.

**b.** Gib den Neigungswinkel in Grad an.

**Aufgabe 3.16.**

Ein Flachdach einer 17,00 m breiten Werkhalle besteht aus 2 Teilen mit verschiedenen Neigungen und enthält innerhalb des Daches eine 20 cm breite Einlaufrinne.
Der größere Teil des Daches ( rechts) hat eine Breite von 12,00 m und eine Neigung von 6%. Das Dach ist an beiden Seiten gleich hoch.



*Querschnitt des Daches*

**a.** Berechne die Dachhöhe.

**b.** Berechne die prozentuale Neigung des kleineren (linken) Dachteiles.

**Aufgabe 3.17.**

Jeder Dachneigung in Prozent entspricht ein zugehöriger Neigungswinkel in Grad und umgekehrt.
Nutze bei den folgenden Berechnungen gedanklich das Neigungsdreieck.

**a.** Ermittle zu den gegebenen Dachneigungen in Prozent jeweils den zugehörigen Neigungswinkel in Grad:

1% ⟶
12% ⟶
3% ⟶
35% ⟶
110% ⟶

**b.** Ermittle zu den gegebenen Neigungswinkeln in Grad jeweils die zugehörige Dachneigung in Prozent:

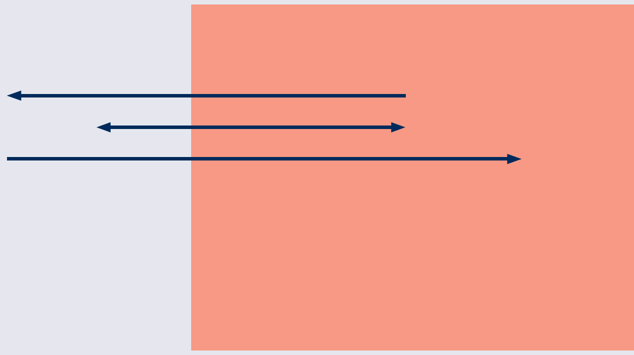
45° ⟶
8° ⟶
1,7° ⟶
40 ° ⟶
55° ⟶





# Kapitel 4

# Proportionalität Verhältnis-rechnung



## 4.1. Erläuterung und Beispiele

- In der Mathematik bezeichnet man mit **Proportionalität** eine bestimmte Zuordnung von zueinander „passenden" Zahlenreihen bzw. Größen.
- Dabei ist einer Zahl aus der einen Zahlenreihe immer genau eine Zahl aus der anderen Zahlenreihe zugeordnet.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Beispiel 1:** | Zahlenreihe 1: | **Anzahl** von Brötchen: | 1 | 2 | 3 | 4 ... |
| | Zahlenreihe 2: | **Preis** dieser Brötchen in €: | 0,40 | 0,80 | 1,20 | 1,60 ... |
| **Beispiel 2:** | Zahlenreihe 1: | **Anzahl** von Dachschindeln: | 2.450 | 4.200 | 3.150 | 3.500 ... |
| | Zahlenreihe 2: | damit **bedeckbare Fläche** in m²: | 70 | 120 | 90 | 100 ... |

**Beispiel 3:** Ein Dach kann von unterschiedlich vielen Dachdeckern gedeckt werden. Dabei wird hier unterstellt, dass alle gleich schnell arbeiten.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Zahlenreihe 1: | **Anzahl** von Dachdeckern: | 4 | 8 | 2 | 1 ... |
| Zahlenreihe 2: | dazu **benötigte Zeit** in Stunden: | 20 | 10 | 40 | 80 ... |

## 4.2. Arten der Proportionalität

| | **Proportionalität** | |
|---|---|---|
| **Name** | **direkte Proportionalität** (oder auch "nur" Proportionalität) | **indirekte Proportionalität** (auch umgekehrte Proportionalität) |
| **Zusammenhang zwischen den beiden Zahlenfolgen** | je **mehr** ⟶ desto **mehr** bzw. je **weniger** ⟶ desto **weniger** | je **mehr** ⟶ desto **weniger** bzw. je **weniger** ⟶ desto **mehr** |
| **Beispiele** | • je **mehr** Brötchen, desto **höher** der Preis<br>• je **mehr** Dachschindeln, desto **größer** die damit bedeckbare Fläche | • je **größer** die Anzahl von Dachdeckern, desto **kleiner** die zum Herstellen eines Daches benötigte Zeit |



## 4.3. Direkte Proportionalität

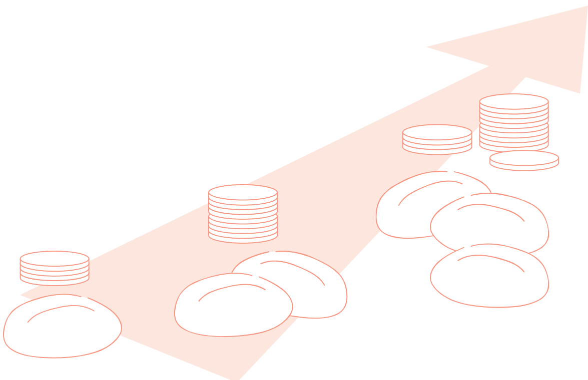
### 4.3.1. Merkmale der direkten Proportionalität

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Beispiel 1:** | Zahlenreihe 1: | **Anzahl** von Brötchen: | 1 | 2 | 3 | 4 ... |
| | Zahlenreihe 2: | **Preis** dieser Brötchen in €: | 0,40 | 0,80 | 1,20 | 1,60 ... |

- Das **Verhältnis** zweier zueinander gehöriger Zahlen ist immer **gleich**.
  ⟶ Die Zahlenreihen sind zueinander **„direkt proportional"**.

  $\frac{0,40\ €}{1} = \mathbf{0,40\ €}$ $\quad \frac{0,80\ €}{2} = \mathbf{0,40\ €}$ $\quad \frac{1,20\ €}{3} = \mathbf{0,40\ €}$ $\quad \frac{1,60\ €}{4} = \mathbf{0,40\ €}$ ...

- Für jedes Zahlenpaar von Beispiel 1 gilt:
  **Preis** der Brötchen = **0,40 € · Anzahl** der Brötchen
- **Anwendungsgebiete der direkten Proportionalität:** Prozentrechnung; Neigung in Prozent; Materialverbrauchsrechnungen; Lohnrechnungen uvm.
- Für alle diese Beispiele gilt:
  **Je größer** (bzw. kleiner) die Zahlen der einen Zahlenreihe sind, **desto größer** (bzw. kleiner) sind die Zahlen der anderen Zahlenreihe. Die Zahlenreihen verändern sich gleichartig. Zusammengehörige Zahlenpaare bilden das gleiche Verhältnis.



**BEACHTE**

**Je mehr** Brötchen, **desto größer** der Preis. Also **direkte Proportionalität!**

### 4.3.2. Berechnungen mit Verhältnisgleichung

**Beispiel:** Wieviel kosten 23 Brötchen, wenn 3 Brötchen 1,20 € kosten?

| | | |
|---|---|---|
| **Ansatz** | ↓ 3 Brötchen ≙ 1,20 € ↓<br>23 Brötchen ≙ x | Pfeile (gleiche Richtung) setzen/denken. |
| **Verhältnisgleichung** | $\frac{3}{23} = \frac{1{,}20\ €}{x}$ | Verhältnisgleichung entsprechend der Pfeile bilden. |
| **Umstellen** | $x = \frac{23 \cdot 1{,}20\ €}{3}$ | Die diagonal stehenden Zahlen der Verhältnisgleichung werden multipliziert. Durch die Zahl, die dem x diagonal gegenübersteht, wird dividiert. |
| **Ergebnis** | **x = 9,20 €** **Somit kosten 23 Brötchen 9,20 €.** | |

### 4.3.3. Anderer Rechenweg - Berechnungen mit Dreisatz

**Beispiel:** Wieviel kosten 23 Brötchen, wenn 3 Brötchen 1,20 € kosten?

**Gleiche Aufgabe, anderer Rechenweg!**

| | |
|---|---|
| **1. Zeile** | 3 Brötchen ≙ 1,20 €<br>weil 3 **: 3** = 1 ↓ ↓ deshalb auch 1,20 € **: 3** rechnen |
| **2. Zeile** | 1 Brötchen ≙ 0,40 €<br>weil 1 **· 23** = 23 ↓ ↓ deshalb auch 0,40 € **· 23** rechnen |
| **3. Zeile** | **23 Brötchen ≙ 9,20 €** |
| **Ergebnis** | **23 Brötchen kosten 9,20 €** |



## 4.4. Indirekte Proportionalität

### 4.4.1. Merkmale der indirekten Proportionalität

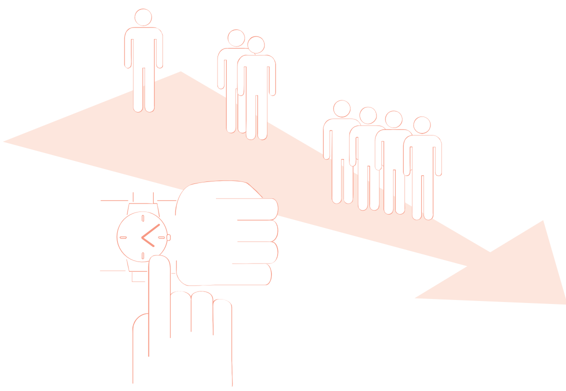
**Beispiel 3:**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Zahlenreihe 1: **Anzahl** von Dachdeckern: | 1 | 2 | 4 | 8 … |
| Zahlenreihe 2: **benötigte Zeit** in Stunden: | 80 h | 40 h | 20 h | 10 h … |

- Das **Produkt** zweier zueinander gehöriger Zahlen ist immer gleich. ⟶ Die Zahlenreihen sind zueinander **„indirekt proportional"** (auch „umgekehrt proportional").

  1 · 80 h = **80 h** 1 · 40 h = **80 h** 4 · 20 h = **80 h** 8 · 10 h = **80 h** …

- Für jedes Zahlenpaar von Beispiel 3 gilt:
  **Anzahl** der Dachdecker · von ihnen **benötigte Zeit** = **80 h**
  (80 h = Herstellungszeit insgesamt)
- **Anwendungsgebiete der indirekten Proportionalität:** Anzahl Arbeiter und nötige Zeit für eine Arbeit; Geschwindigkeits-/Zeitprobleme; Anzahl und Abstand der Leisten einer Lattung; Ladevermögen von Lkw und Anzahl der nötigen Fuhren uvm.
- Für alle diese Beispiele gilt:
  **Je größer** (bzw. kleiner) die Zahlen der einen Zahlenreihe sind, **desto kleiner** (bzw. größer) sind die Zahlen der anderen Zahlenreihe. Die Zahlenreihen verändern sich entgegengesetzt. Zusammengehörige Zahlenpaare bilden das gleiche Produkt.



**BEACHTE**

**Je mehr** Dachdecker, **desto kürzer** die Zeit. Also **indirekte/ umgekehrte Proportionalität!**

### 4.4.2. Berechnungen mit Verhältnisgleichung

**Beispiel:** Wie viele Stunden benötigen 5 Dachdecker für eine Arbeit,wenn 4 Dachdecker die Arbeit in 20 Stunden erledigen?

| | | |
|---|---|---|
| **Ansatz** | ↓ 4 Dachdecker ≙ 20 h<br>4 Dachdecker ≙ x ↑ | Pfeile (entgegengesetzte Richtung) setzen. |
| **Verhältnisgleichung** | $\frac{4}{5} = \frac{x}{20\,h}$ | Verhältnisgleichung entsprechend der Pfeile bilden (also rechte Seite umgekehrt!). |
| **Umstellen** | $x = \frac{4 \cdot 20\,h}{5}$ | Die diagonal stehenden Zahlen der Verhältnisgleichung werden multipliziert. Durch die Zahl, die dem x diagonal gegenübersteht, wird dividiert. |
| **Ergebnis** | **x = 16 h**<br>**5 Dachdecker erledigen diese Arbeit in 16 Stunden.** | |

### 4.4.3. Anderer Rechenweg - Berechnungen mit Produktgleichung

**Beispiel:** Wie viele Stunden benötigen 5 Dachdecker für eine Arbeit,wenn 4 Dachdecker die Arbeit in 20 Stunden erledigen?

| | | |
|---|---|---|
| **Ansatz** | 4 Dachdecker · 20 h = 80 h<br>5 Dachdecker · x = 80 h | Die Gesamtzeit muss stets gleich sein. Die beiden Produkte werden gleichgesetzt. |
| **Produktgleichung** | $4 \cdot 20\,h = 5 \cdot x$ | Auf beiden Seiten wird durch die Zahl, die neben dem x steht, dividiert. |
| **Umstellen** | $x = \frac{4 \cdot 20\,h}{5}$ | Dann steht x einzeln auf der einen Seite der Gleichung und auf der anderen ein Bruch. |
| **Ergebnis** | **x = 16 h**<br>**5 Dachdecker erledigen diese Arbeit in 16 Stunden.** | |

**Gleiche Aufgabe, anderer Rechenweg!**





### 4.4.4. Anderer Rechenweg - Berechnungen mit Dreisatz

**Beispiel:** Wie viele Stunden benötigen 5 Dachdecker für eine Arbeit,wenn 4 Dachdecker die Arbeit in 20 Stunden erledigen?

**Gleiche Aufgabe, ein dritter Rechenweg!**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1. Zeile** | | 4 Dachdecker ≙ 20 h | (4 · 20 h = 80 h) |
| | weil<br>4 : **4** = 1 | | deshalb **umgekehrt**<br>20 h · **4** rechnen |
| **2. Zeile** | | 1 Dachdecker ≙ 80 h | (1 · 80 h = 80 h) |
| | weil<br>1 · **5** = 5 | | deshalb **umgekehrt**<br>80 h : **5** rechnen |
| **3. Zeile** | | **5 Dachdecker ≙ 16 h** | (5 · 16 h = 80 h) |
| **Ergebnis** | **5 Dachdecker erledigen diese Arbeit in 16 Stunden.** | | |

## 4.5. Mischformen

### 4.5.1. Prinzipielles

In der Praxis kommen relativ oft **Kombinationen von mehreren Proportionalitäten** vor. Wir beschränken uns hier auf solche Kombinationen, bei denen innerhalb eines Gesamtproblems drei Größen direkt bzw. indirekt proportional zusammenhängen.

**Um das Gesamtproblem zu erfassen, sollte man sich folgende Fragen stellen:**

- Was ist gesucht? Welche Größe?
- Welche Größen treten noch auf, von denen die gesuchte abhängig ist?
- Welche Art von Proportionalität in Bezug auf die gesuchte Größe liegt jeweils vor?

**Beim Berechnen bietet sich folgendes Vorgehen an:**

- Das **Zerlegen** des Gesamtproblems **in 2 Teilaufgabe entsprechend der Proportionalitäten.** Gerechnet wird bei jeder Teilaufgabe nur mit 2 Größen, die jeweilige dritte Größe wird bei der Teilaufgabe als konstant angesehen.
- Die **Anwendung der bekannten Schrittfolge** für jede Teilaufgabe.

### 4.5.2. Beispielaufgabe - Vorüberlegungen

**Beispiel:** Mit 3 Pumpen kann man eine Zisterne mit einem Inhalt von 3.600 Litern in 8 Stunden leeren. In welcher Zeit kann mit 5 gleichartigen Pumpen eine andere Zisterne mit einem Inhalt von 4.200 Litern entleert werden?

**Problemerfassung:**

gesucht ist: **Zeit** zum Entleeren in Stunden

Größen, von denen diese Zeit abhängt: **Anzahl** der Pumpen, **Inhalt** (Volumen) der Zisternen

**Proportionalitäten:**

**Je größer** die Anzahl der Pumpen, **desto kürzer** ist die zum Entleeren benötigte Zeit (bei konstant großer Zisterne) ⟶ **indirekte Proportionalität**

**Je größer** der Inhalt der Zisterne, **desto größer** ist die zum Entleeren benötigte Zeit (bei konstanter Pumpenzahl) ⟶ **direkte Proportionalität**

### Rechenweg 1: Berechnungen mit Verhältnisgleichung

**Teilaufgabe 1: Indirekte** Proportionalität von Anzahl der Pumpen und benötigter Zeit

| | | |
|---|---|---|
| **Ansatz** | ↓ 3 Pumpen ≙ 8 h ↑<br>5 Pumpen ≙ x | konstant: Inhalt 3.600 l |
| **Verhältnisgleichung** | $\frac{3}{5} = \frac{x}{8\,h}$ | |
| **Umstellen** | $x = \frac{3 \cdot 8\,h}{5}$ | |
| **Ergebnis** | $\underline{\underline{x = 4{,}8\,h}}$ | |
| **Teil-Antwort** | **5 Pumpen benötigen 4,8 Stunden, um eine Zisterne mit einem Inhalt von 3.600 Litern zu leeren.** | |

**Teilaufgabe 2: Direkte** Proportionalität von Inhalt der Zisternen und benötigter Zeit

| | | |
|---|---|---|
| **Ansatz** | ↓ 3.600 l ≙ 4,8 h ↓<br>4.200 l ≙ y | konstant: Pumpenanzahl 5 |
| **Verhältnisgleichung** | $\frac{3.600\,l}{4.200\,l} = \frac{4{,}8\,h}{y}$ | |
| **Umstellen** | $y = \frac{4.200\,l \cdot 4{,}8\,h}{3.600\,l}$ | |
| **Ergebnis** | $\underline{\underline{y = 5{,}6\,h}}$ | |
| **Teil-Antwort** | **5 Pumpen benötigen 5,6 Stunden, um eine Zisterne mit einem Inhalt von 4.200 Litern zu leeren.** | |



### Rechenweg 2: Berechnungen mit Dreisatz

Gleiche Aufgabe, anderer Rechenweg!

**Teilaufgabe 1: Indirekte** Proportionalität von Anzahl der Pumpen und benötigter Zeit

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1. Zeile** | | 3 Pumpen ≙ 8 h | | (3 · 8 h = 24 h) |
| | weil<br>3 : **3** = 1 | ↓ ↓ | deshalb **umgekehrt**<br>8 h · **3** rechnen | |
| **2. Zeile** | | 1 Pumpe ≙ 24 h | | (1 · 24 h = 24 h) |
| | weil<br>1 · **5** = 5 | ↓ ↓ | deshalb **umgekehrt**<br>24 h : **5** rechnen | |
| **3. Zeile** | | $\underline{\underline{\textbf{5 Pumpen} \triangleq \textbf{4,8 h}}}$ | | (5 · 4,8 h = 24 h) |
| **Teil-Antwort** | **5 Pumpen benötigen 4,8 Stunden, um eine Zisterne mit einem Inhalt von 3.600 Litern zu leeren.** | | | |

**Teilaufgabe 2: Direkte** Proportionalität von Inhalt der Zisternen und benötigter Zeit

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1. Zeile** | | 3.600 l ≙ 4,8 h | |
| | weil<br>3.600 : **6** = 600 | ↓ ↓ | deshalb **auch**<br>4,8 h : **6** rechnen |
| **2. Zeile** | | 600 l ≙ 0,8 h | |
| | weil<br>600 · **7** = 4.200 | ↓ ↓ | deshalb **auch**<br>0,8 h · **7** rechnen |
| **3. Zeile** | | $\underline{\underline{\textbf{4.200 l} \triangleq \textbf{5,6 h}}}$ | |
| **Teil-Antwort** | **5 Pumpen benötigen 5,6 Stunden, um eine Zisterne mit einem Inhalt von 4.200 Litern zu leeren.** | | |

## Übungen

**BEACHTE**

- Zu Beginn der Bearbeitung einer Aufgabe bitte stets prüfen, ob **direkte** oder ob **indirekte** Proportionalität vorliegt.
- Bitte die Lösung der Aufgaben **zuerst mittels Dreisatz** versuchen. Wenn es damit nicht klappt, dann Verhältnisgleichung(en) nutzen.

**Aufgabe 4.1.**

4 Dachdecker decken 6 Dächer in einer bestimmten Zeit. Wie viele Dachdecker decken 9 solcher Dächer in der gleichen Zeit?

**Aufgabe 4.2.**

Eine Packung Schieferstifte mit 2,5 kg Inhalt kostet 17,95 €. Wieviel kosten dann 30 kg solcher Stifte?

**Aufgabe 4.3.**

Für 5 m² Dachfläche werden 110 Schieferplatten benötigt.

**a.** Berechne, wieviel solche Platten für eine Dachfläche von 240 m² benötigt werden.

**b.** Berechne die Materialkosten für die Schieferplatten dieses Daches, wenn eine dieser Platten 1,95 € kostet.

**Aufgabe 4.4.**

Eine Dachdeckerfirma verbrauchte bei einer Baustelle 4.560 kWh Baustrom und bezahlte dafür 1.368 €.
Beim nächsten Projekt rechnet man mit einem Verbrauch von 6.000 kWh.
Welche Kosten für den Baustrom mit gleichen Konditionen muss die Firma einplanen?

**Aufgabe 4.5.**

Ein 4,20 m langer Sparren wiegt 18,9 kg. Wieviel wiegt ein 6,70 langer Sparren aus dem gleichen Material?

**Aufgabe 4.6.**

Ein Pultdach mit einer Neigung von 4,5% hat eine Breite von 9,00 m.

**a.** Berechne die Höhe des Daches.

**b.** In welcher Entfernung von der Taufe ist das Dach 15 cm hoch?



## Übungen

**BEACHTE**

- Zu Beginn der Bearbeitung einer Aufgabe bitte stets prüfen, ob **direkte** oder ob **indirekte** Proportionalität vorliegt.
- Bitte die Lösung der Aufgaben **zuerst mittels Dreisatz** versuchen. Wenn es damit nicht klappt, dann Verhältnisgleichung(en) nutzen.

**Aufgabe 4.7.**

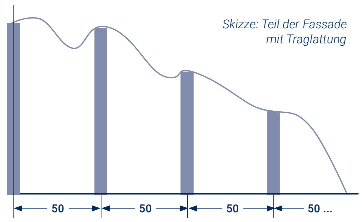
4 Dachdecker erledigen eine bestimmte Arbeit in 10 Tagen. In wieviel Tagen wird diese Arbeit durch 5 Dachdecker erledigt?

**Aufgabe 4.8.**

Ein Team von 6 Dachdeckern deckt in 30 Stunden eine Dachfläche von 310 m².
Welche Zeit benötigt das Team, wenn einer von ihnen durch Krankheit ausfällt?

**Aufgabe 4.9.**

Für die waagerecht anzubringende Verkleidung einer 5,60 m hohen Fassade ohne Dämmung wird eine senkrechte Traglattung (blau) erstellt. Deren Latten wurden in einem Abstand von 50 cm geplant (Abstand von Mitte Latte bis Mitte Latte), da 24 solche Abstände genau der Fassadenbreite entsprechen.




**a.** Nach Vorgabe des Herstellers der Verkleidung müssen die Latten aber in einem Abstand von nur 40 cm angebracht werden.
Berechne, wie viele Zwischenräume (= Abstände) nun entstehen.

**b.** Berechne jeweils, wieviel laufende Meter Lattung zum einen nach der zuerst geplanten und zum anderen nach der laut Vorgabe notwendigen Variante gekauft werden müssten.

**c.** Berechne die Mehrkosten bei einem Preis von 1,17 € für den laufenden Meter Lattung.

**Aufgabe 4.10.**

Der Aushub einer Baugrube von 120 m³ soll durch eine Transportfirma abgefahren werden.
Anbieter A hat ein Fahrzeug mit 2 Tonnen Nutzlast, müsste 96 Fuhren durchführen und verlangt pro Fuhre 12,50 €. Anbieter B hat ein Fahrzeug mit 3 Tonnen Nutzlast und verlangt 15,00 € pro Fuhre.

Ermittle die jeweiligen Kosten für den Abtransport und entscheide aufgrund der Kosten, welcher Anbieter von dir den Auftrag bekäme?